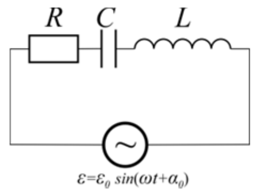
Урок №9 (15.10.2019)
Электромагнитные колебания. Механический эквивалент электрических сетей. Колебательный контур.

0. Небольшое повторение



Рассмотрим последовательную RCL–цепочку, подключённую к генератору переменного тока. Вспомним некоторые основы теории электрических цепей.

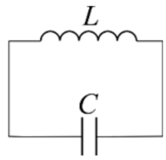
- Т.к. цепь без разветвлений, ток в любой точке цепи один и тот же в любой момент времени.
- Ток – это заряд, протекающий через данную точку схемы за единицу времени, другими словами это скорость протекания заряда: $I = \dfrac{dq}{dt} = \dot{q}$.
- Сумма падений напряжений на сопротивлении (U_R), ёмкости (U_C) и индуктивности (U_L) в любой момент времени равна разности потенциалов на источнике.
- Падение напряжения на сопротивлении определяется законом Ома: $U_R = IR$.
- Напряжение на конденсаторе по определению равно $U_C = \dfrac{q}{C}$.
- На катушке в случае изменяющегося тока возникает *противо-ЭДС*, равная $\varepsilon = -L\dfrac{dI}{dt} = -L\dfrac{d^2q}{dt^2} = -L\ddot{q}$.

Механический эквивалент электрических сетей.

В механике и в теории электрических сетей переменного тока встречается подозрительно много «похожих формул». Например:

Механика	Электричество
Координата x	Заряд q
Масса m	Индуктивность L
Жёсткость пружины k	Ёмкость$^{-1}$ $1/C$
К-нт вязкого трения β	Сопротивление R
Скорость v	Ток I
Сила F	Напряжение U

1. Колебательный контур



Простейший колебательный контур состоит из соединённых между собой катушки индуктивности и конденсатора.

$U_L + U_C = 0$. ЭДС на катушке в любой момент равно по модулю и противоположно по направлению ЭДС самоиндукции (т.к. сопротивление катушки равно нулю), поэтому $U_L = -\varepsilon = L\dfrac{dI}{dt}$. Сводя все воедино, получим уравнение:

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0.$$

Пусть $\omega_0^2 = 1/LC$, тогда уравнение перепишется в виде

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Решение этого уравнения нам известно:

$q(t) = Q\sin(\omega_0 t + \alpha)$, где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$, а Q и α определяются из начальных условий. Обычно говорится, что в начальный момент времени конденсатор заряжен до напряжения U_0 и тока в цепи нет (замыкают ключ). В этом случае решение удобнее записать в виде $q(t) = CU_0 \cos\omega t$

В колебательном контуре происходит перекачка энергии магнитного поля в энергию электрического поля и наоборот.

2. Затухающие электромагнитные колебания

Если между катушкой и конденсатором вставить сопротивление, характеризующее тепловые потери в колебательном контуре, получим уравнение:

$U_L + U_C + U_R = 0$, а учитывая, что $U_R = IR = \dot{q}R$, получим

$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = 0$, или

$$\ddot{q} + (R/L)\dot{q} + (1/LC)q = 0.$$

Обозначая $\omega_0^2 = 1/LC$, $2\gamma = R/L$, получим уравнение затухающих колебаний:

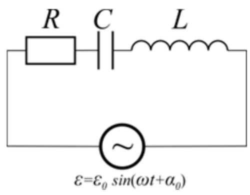
$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Решением его, как известно, является функция $q(t) = Q_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \alpha)$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Число $\tau = 1/\gamma = 2L/R$ называется *временем жизни колебаний*, а число $\eta = \pi \cdot \tau/T$ – *добротностью контура*.

Добротность контура пропорциональна количеству периодов за время жизни колебаний.

3. Вынужденные колебания.



Рассмотрим полную RCL -схему, показанную в начале урока. Уравнение колебаний, очевидно, принимает форму

$$\ddot{q}+2\gamma\dot{q}+\omega_0^2 q = A_0 \sin\omega t,$$

где $\omega_0^2 = 1/LC$, $2\gamma = R/L$; $A_0 = \varepsilon_0/L$.

Повторяя рассуждения урока №7 (от 1 октября), ищем решение в виде

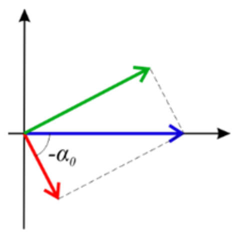
$q(t) = Q_0 \sin(\omega t+\alpha_0)$, то есть, считаем, что колебания будут проходить с частотой вынуждающего напряжения.

Подставляя в уравнение первые и вторые производные, получим:

$$-Q_0\omega^2 \sin(\omega t+\alpha_0) + 2\gamma\omega Q_0 \cos(\omega t+\alpha_0) + \omega_0^2 Q_0 \sin(\omega t+\alpha_0) = A_0 \sin\omega t$$

, или

$$(\omega_0^2-\omega^2)\sin(\omega t+\alpha_0) + 2\gamma\omega\cos(\omega t+\alpha_0) = A_0/Q_0 \sin\omega t.$$



Данное выражение превращается в тождество при определённых отношениях между коэффициентами при тригонометрических функциях и определённой α_0. Проще всего найти эти отношения методом векторных диаграмм. Обозначим красным вектором (см. рис) первое слагаемое, зелёным – второе; сумму обозначим синим цветом. Тогда

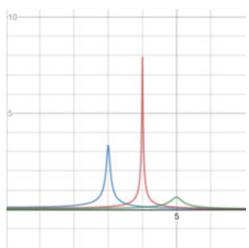
$$\frac{A_0}{Q_0} = \sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}.$$

Следовательно

$$Q_0 = \frac{\varepsilon_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \text{ и}$$

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\right).$$

Ток в контуре описывается выражением



$$I(t) = \dot{q} = Q_0\omega\cos(\omega t+\alpha_0),$$

максимальный ток равен

$$I_{\max} = \frac{\varepsilon_0\omega}{L\cdot\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

На графике справа показаны графики амплитуды от частоты для разных резонансных частот и разных добротностей (чем выше график, тем больше добротность).

4. Задача

Написать уравнение для тока $I(t)$ и для зависимости зарядов на конденсаторах от времени на схеме, показанной на рисунке, если в начальный момент (т.е. в момент замыкания ключа) конденсатор C_1 заряжен до заряда q.

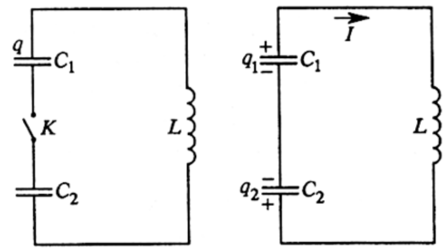


Рис. 161. В начальный момент времени заряжен только один конденсатор

Рис. 162. Заряды конденсаторов и ток в контуре после замыкания ключа

Решение. Пусть через малый промежуток времени после замыкания ключа знаки зарядов и направления тока выглядят, как на рисунке. Тогда $q_1 + q_2 = q$ и сумма напряжений на всех элементах равна нулю (обходим по часовой стрелке и не забываем правило Ленца): $\frac{q_1}{C_1} - L\frac{dI}{dt} - \frac{q_2}{C_2} = 0$.

При этом ток через катушку равен $I = \frac{dq_2}{dt} = -\frac{dq_1}{dt}$ (конденсатор 2 заряжается, конденсатор 1 разряжается). Следовательно, $\frac{dI}{dt} = -\frac{d^2 q_1}{dt^2} = -\ddot{q}_1$.

Исключая $\frac{dI}{dt}$ и q_2, получим уравнение:

$$q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) + L\ddot{q}_1 - \frac{q}{C_2} = 0.$$

Обозначим через $\omega_0^2 = \frac{1}{LC_0}$, где $C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$, получим $\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 - \frac{q}{LC_2} = 0$. Произведём замену: $Q(t) = q_1(t) - q\frac{C_1}{C_1 + C_2}$. Заметим, что $\ddot{Q}(t) = \ddot{q}_1(t)$. В итоге получим уравнение $\ddot{Q} + \omega_0^2 Q = 0$, имеющее решением $Q(t) = Q_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$. Тогда для $q_1(t)$ получим:

$$q_1(t) = q\frac{C_1}{C_1 + C_2} + Q_0 \sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Константы Q_0 и α найдём из условий $q_1(0) = q$, $I(0) = 0$. $I(t) = \omega_0 Q_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$.

Итак, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $Q_0 = q\frac{C_1}{C_1 + C_2}$ и полное решение:

$$q_1(t) = q\frac{C_1}{C_1 + C_2}\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\cos\omega_0 t\right),\ I(t) = q\sqrt{\frac{C_2}{L(C_1 + C_2)C_1}}\sin\omega_0 t.$$